

Persamaan Diferensial Orde Satu

Oleh Dessy Irmawati

Kompetensi

- Mengidentifikasi tipe persamaan diferensial biasa orde satu
- Menentukan teknik penyelesaian persamaan diferensial dengan metode:
 1. separable variable (variabel terpisah)
 2. Homogeneous (homogen)
 3. linear
 4. exact (eksak)

Kompetensi(2)

- Mengurangi persamaan diferensial untuk persamaan dengan tipe-tipe di atas menggunakan substitusi dan penyelesaian
- Permasalahan model fisika dalam bentuk persamaan diferensial biasa orde pertama dan penyelesaiannya

I. Introduction

- Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde satu:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

jika $f(x, y) = -M(x, y)/N(x, y)$, maka persamaan dapat ditulis

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Introduction(2)

- Contoh

$$\frac{dy}{dx} - 2y = \sin x \text{ dan } 2x \frac{dy}{dx} + (1-x)y = x^2$$

persamaan tersebut dapat dituliskan

$$\frac{dy}{dx} = 2y + \sin x \text{ dan } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - (1-x)y}{2x}$$

atau

$$(2y + \sin x) dx - dy = 0 \text{ dan } [x^2 - (1-x)y]dx - 2x dy = 0$$

II. Separable Equation

- Metode identifikasi

bentuk umum persamaan diferensial orde satu

atau
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.1)$$

$$f(x, y) = u(x) v(y) \quad (2.2)$$

dengan substitusi persamaan (2.2) ke (2.1) maka

$$\frac{dy}{dx} = u(x)v(y)$$

Definisi 2.1 (Separable Equation)

- Persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Disebut separable equation dan dapat dituliskan

$$\frac{dy}{v(y)} = u(x)dx \quad (2.3)$$

Contoh 2.1

- Tentukan persamaan berikut apakah separable equation atau tidak?

$$(a) \frac{dy}{dx} - xy = x$$

$$(b) \frac{dy}{dx} = xe^{y-x}$$

$$(c) \sin y \cos x \frac{dy}{dx} - \cos y \sin x = 0$$

$$(d) x \frac{dy}{dx} = x - 2y$$

solusi

(a) persamaan dapat dituliskan $\frac{dy}{dx} = x + y$

pisahkan variable, sehingga $\frac{dy}{1+y} = xdx$

maka persamaan tersebut adalah separable (dapat dipisahkan)

Solusi (2)

(b) persamaan dapat dituliskan $\frac{dy}{dx} = xe^y e^{-x}$

pemisahan variabel $e^{-y} dy = xe^{-x} dx$

jadi persamaan tersebut adalah persamaan yang dapat dipisahkan

(c) persamaan dapat dituliskan $\sin y \cos x \frac{dy}{dx} = \cos y \sin x$

pemisahan variabel $\frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{\sin x}{\cos x} dx$

jadi persamaan adalah dapat dipisahkan (separable)

(d) variabel x dan y tidak dapat dipisahkan

Solusi Separable Equation

- Solusi persamaan diferensial dengan tipe ini didapatkan dengan mengintegrasikan kedua sisi persamaan (2.3)

$$\int \frac{dy}{v(y)} + A_1 = \int u(x)dx + A_2$$

dimana A_1 dan A_2 adalah konstanta, kemudian

$$\int \frac{dy}{v(y)} = \int u(x)dx + A_2 - A_1$$

$$\int \frac{dy}{v(y)} = \int u(x)dx + A$$

Contoh 2.2

- Temukan penyelesaian persamaan berikut:

$$(a) (x + 2) \frac{dy}{dx} = y$$

$$(b) \cot y \frac{dy}{dx} = \cot x$$

$$(c) e^x \frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$$

$$(d) \frac{dy}{dx} = \sec^2 y$$

Contoh 2.3

$x \frac{dy}{dx} - 3 = 2(y + \frac{dy}{dx})$ dengan kondisi awal $y = 0$ ketika $x = 3$

solusi

persamaan menjadi

$$(x - 2) \frac{dy}{dx} = 2y + 3$$

$$\frac{dy}{2y + 3} = \frac{dx}{x - 2}$$

$$\int \frac{dy}{2y + 3} = \int \frac{dx}{x - 2}$$

$$\frac{1}{2} \ln|2y + 3| = \ln|x - 2| + k$$

$$2y + 3 = A(x - 2)^2, A = e^{2k}$$

dengan memasukkan kondisi awal $x = 3$ dan $y = 0$, maka

$$3 = A(3 - 2)^2,$$

$$A = 3$$

$$2y + 3 = 3(x - 2)^2$$

jadi persamaan eksplisitnya adalah

$$y = \frac{3}{2}(x - 2)^2 - \frac{3}{2}$$

Contoh

2.4 Temukan solusi persamaan diferensial

$$x^2(1-y)\frac{dy}{dx} + y^2(1+x) = 0, \text{ kondisi awal } y = 1 \text{ ketika } x = 1$$

solusi:

2.5 Menggunakan substitusi $z = x+y$ ubahlah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+5}$$

contoh

tentukan penyelesaian persamaan dengan kondisi $y(1)=1$

2.6 menggunakan substitusi $z = xy$ ubahlah

$$x \frac{dy}{dx} + y = 2x\sqrt{1 - x^2 y^2}$$

tentukan penyelesaian persamaan

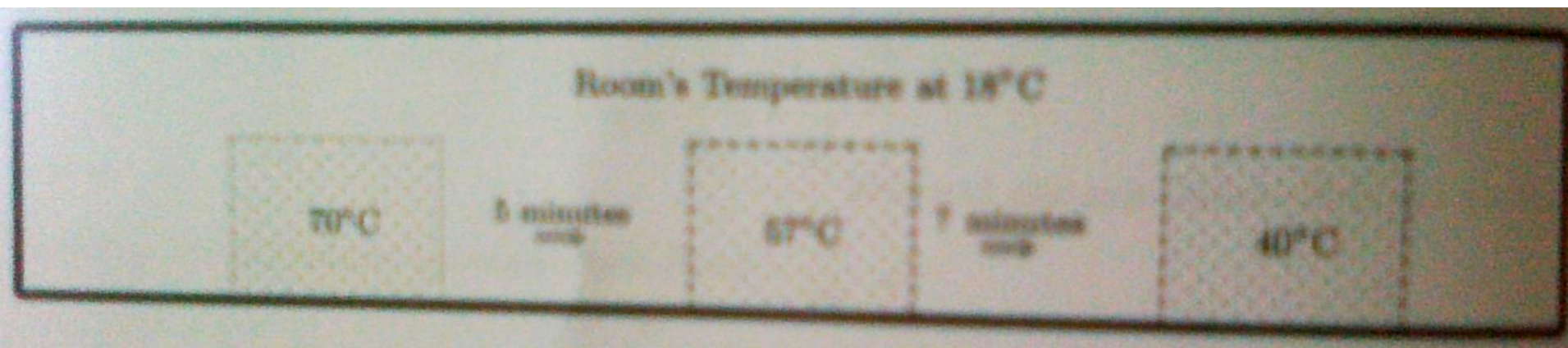
contoh

2.7 Berdasarkan hukum pendinginan Newton, penentuan body cools adalah sebanding antara suhu badan (body) dan lingkungan. Misalkan θ mewakili suhu badan dalam ruangan ($^{\circ}\text{C}$) yang mempunyai temperatur tetap 18°C . Jika body cools dari 70°C hingga 57°C dalam waktu 5 menit, berapa lama suhu akan turun menjadi 40°C ?

soulsi

- Berdasarkan perubahan θ , yang sebanding dengan beda antara θ dan 18°C . Maka dapat dirumuskan

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - 18), \quad 40 \leq \theta \leq 70$$



2.8 A stone of mass m is thrown vertically upward from the ground with air resistance equals to kv^2g , where v is the velocity of the stone, k is a constant and g is the gravitational constant. If initial velocity of the stone is u , find the maximum height attained by the stone.